**Bezwględny błąd prognozy ex post**

gdzie:

 - realizacja zmiennej Y w czasie t>n,

 - prognoza zmiennej Y na czas t>n, która została wyliczona zastosowaną metodą.

**Średni błąd prognozy ex post**

gdzie:

 - realizacja zmiennej Y w czasie t>n,

 - prognoza zmiennej Y na czas t>n, która została wyliczona zastosowaną metodą,

T – n – wyrażenie to oznacza liczbę okresów, na które wyznaczono prognozy.

**Średni względny błąd prognozy ex post**

gdzie:

 - realizacja zmiennej Y w czasie t>n,

 - prognoza zmiennej Y na czas t>n, która została wyliczona zastosowaną metodą,

T – n – wyrażenie to oznacza liczbę okresów, na które wyznaczono prognozy.

**Średni błąd prognozy ex ante**

gdzie:

X – macierz obserwacji zmiennych objaśniających,

 - wektor wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozy,

S – odchylenie standardowe składnika resztowego.

**Odchylenie standardowe składnika resztowego**

gdzie:

 - realizacja zmiennej Y w czasie t,

 - prognoza zmiennej Y na czas t,

n – liczba obserwacji w szeregu czasowym,

k – liczba szacowanych parametrów.

**Błąd prognozy ex ante**

gdzie:

𝑇 – numer momentu, dla którego wyznaczono prognozę,

𝑡 ̅ - średnia wartość zmiennej objaśniającej (t) w szeregu czasowym o liczbie obserwacji równej n,

S - odchylenie standardowe składnika resztowego.

**Względny błąd prognozy ex ante**

gdzie:

 - wartość średniego błędu prognozy ex ante,

 - wartość prognozy w okresie t.

**Metoda naiwna**

gdzie:

 - prognoza wartości zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - wartość zmiennej prognozowanej w okresie, momencie t - 1.

**Współczynnik zmienności**

gdzie:

s – odchylenie standardowe zmiennej Y,

𝑦 ̅ - średnia wartość zmiennej Y w analizowanym okresie.

**Odchylenie standardowe**

gdzie:

 - wartość zmiennej Y w czasie, momencie t,

 - średnia wartość z próby (szeregu czasowego zmiennej Y),

n – liczba obserwacji w szeregu czasowym.

**Metoda średniej ruchomej prostej**

gdzie:

 - prognoza zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - wartość zmiennej prognozowanej w okresie, momencie t,

k – stała wygładzania.

**Metoda średniej ruchomej ważonej**

gdzie:

 - prognoza zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - wartość zmiennej prognozowanej w okresie, momencie t,

 - waga nadana przez prognostę wartości zmiennej prognozowanej w okresie, momencie t,

k – stała wygładzania.

Przy metodzie średniej ruchomej ważonej zadaniem prognosty jest **wyznaczenie wartości k oraz wag dla poszczególnych wartości**, branych pod uwagę przy wyliczaniu średniej, w sposób optymalny

**Model wygładzania wykładniczego**

gdzie:

 - wartość zmiennej prognozowanej z okresu t – 1,

 - prognoza zmiennej Y z okresu t – 1,

α – parametr wygładzania z przedziału (0; 1).

**Model addytywny** (każdy element (wartość) szeregu czasowego jest sumą poszczególnych składowych analizowanego szeregu)

gdzie:

f(t) – funkcja czasu opisująca trend,

g(t) – funkcja czasu opisująca wahania sezonowe,

h(t) – funkcja czasu opisująca wahania cykliczne,

 - składnik losowy.

**Model multiplikatywny** (każdy element (wartość) szeregu czasowego jest iloczynem poszczególnych składowych szeregu czasowego)

gdzie:

f(t) – funkcja czasu opisująca trend,

g(t) – funkcja czasu opisująca wahania sezonowe,

h(t) – funkcja czasu opisująca wahania cykliczne,

 - składnik losowy.

**Funkcja liniowa**

gdzie:

, - parametry funkcji liniowej,

t – wartości zmiennej czasowej (objaśniającej).

**Funkcja wykładnicza**

lub

gdzie:

, - parametry modelu,

t – zmienna objaśniająca (t=1,…,n).

Podstawowy wzór oparty na zapisach macierzowych dla podstawowej funkcji liniowej (**metoda najmniejszych kwadratów**)

Wektor a, będzie zawierał oszacowane parametry modelu. Macierz X, zawiera wartości zmiennej czasowej, a wektor y wartości rzeczywiste szeregu czasowego.

Wzory, które można wykorzystać do **wyznaczenia parametrów funkcji liniowej**

gdzie:

𝑡 ̅ - średnia arytmetyczna zmiennej czasowej t; 𝑡 ̅=(𝑛+1)/2

𝑦 ̅ - średnia arytmetyczna szeregu czasowego (𝑦\_𝑡).

**Wielomian stopnia drugiego**

gdzie:

, , - parametry funkcji wielomianowej stopnia drugiego,

, - wartości zmiennej czasowej oraz wartości zmiennej czasowej podniesione do kwadratu.

**Funkcja potęgowa**

gdzie:

, - parametry modelu,

t – wartości zmiennej czasowej.

**Funkcja logarytmiczna**

gdzie:

, - parametry modelu,

 – logarytmy wartości zmiennej czasowej.

**Postać funkcji potęgowej**, która obok logarytmicznej, może się sprawdzić w przypadku **szeregu z malejącymi przyrostami**

gdzie:

, - parametry modelu,

t – wartości zmiennej czasowej.

**Wielomian stopnia drugiego** (funkcja kwadratowa o ujemnej wartości parametru przy zmiennej czasowej podniesionej do kwadratu)

gdzie:

, , - parametry funkcji wielomianowej stopnia drugiego,

, - wartości zmiennej czasowej oraz wartości zmiennej czasowej podniesione do kwadratu.

**Wariancja resztowa**

gdzie:

k – liczba szacowanych parametrów,

n – liczba obserwacji,

 - wartość zmiennej prognozowanej w okresie, momencie t,

 - prognozowana wartość zmiennej Y w okresie, momencie t.

**Odchylenie standardowe składnika resztowego**

**Współczynnik zmienności resztowej**

gdzie:

 - wartość odchylenia składnika resztowego,

 - średnia wartość zmiennej prognozowanej.

**Współczynnik determinacji**

gdzie:

 - wartość zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - prognozowana wartość zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - średnia wartość zmiennej prognozowanej.

**Współczynnik zbieżności**

lub

gdzie:

 - wartość zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - prognozowana wartość zmiennej Y w okresie, momencie t,

 - średnia wartość zmiennej prognozowanej.

**Wartość bezwzględnego błędu prognozy ex ante dla funkcji liniowej**

gdzie:

n – liczba obserwacji,

T – numer momentu czy okresu, dla którego wyznacza się prognozę,

 – błąd standardowy.

**Dla modeli nieliniowych, sprowadzanych do liniowych stosuje się wzór:**

gdzie:

 - pochodna obliczana w punkcie ,

 - wariancja prognozy dla zmiennej Y w momencie, okresie T,

 - wariancja prognozy dla transformaty Y’ w momencie, okresie T.

Po wyliczeniu wartości 𝜗\_𝑡 można ocenić prognozę pod względem **względnego błędu predykcji** wg wzoru:

**Model Holta**

oraz

gdzie:

 - wygładzona wartość zmiennej prognozowanej na moment, okres t,

 - wygładzona wartość przyrostu trendu na moment, okres t,

α, β – parametry modelu, które mogą przyjmować wartości z przedziału [0; 1].

**Wyznaczanie prognozy w oparciu o model Holta**

gdzie:

 - prognoza zmiennej Y na moment, okres t,

 - wygładzona wartość zmiennej prognozowanej na moment, okres n,

 - ocena przyrostu trendu na moment, okres n,

n – liczba wyrazów w szeregu czasowym, zmiennej prognozowanej Y.

**Wyznaczanie wartości prognoz wygasłych** (model Holta)

**Metoda trendów jednoimiennych okresów**

gdzie:

 - wartość szeregu czasowego w i-tym cyklu (i=1, 2,…, N) dla j-tej fazy (j=1, 2,…, m),

 - funkcja trendu dla j-tej fazy cyklu,

 - składnik losowy.

**Metoda trendów jednoimiennych okresów (postać funkcji liniowej)**

gdzie:

 - wartość szeregu czasowego w i-tym cyklu (i=1, 2,…, N) dla j-tej fazy (j=1, 2,…, m),

, - parametry j-tej liniowej funkcji trendu,

 - składnik losowy.

**Metoda wskaźników (wskaźnik sezonowości w wersji multiplikatywnej)**

gdzie:

 - wartość szeregu czasowego w momencie, okresie , w l-tym cyklu i j-tej fazie,

 – funkcja trendu opisująca tendencję rozwojową,

 - wskaźnik sezonowości dla wersji multiplikatywnej dla j-tej fazy każdego cyklu,

 - składnik losowy.

**Metoda wskaźników (wskaźnik sezonowości w wersji addytywnej)**

gdzie:

 - wartość szeregu czasowego w momencie, okresie , w l-tym cyklu i j-tej fazie,

 – funkcja trendu opisująca tendencję rozwojową,

 - bezwzględne odchylenie sezonowe dla j-tej fazy każdego cyklu,

 - składnik losowy.

Jeżeli wyznaczamy **bezwzględne odchylenia sezonowe**, trend eliminujemy poprzez obliczenie różnic pomiędzy wartościami rzeczywistymi, a tymi które wynikają z oszacowanej funkcji trendu:

Jeżeli wyznaczamy wskaźniki sezonowości, to należy obliczyć iloraz pomiędzy wartością rzeczywistą, a wartością wynikającą z wyznaczonej funkcji trendu:

**Wyznaczanie surowych wahań sezonowych w modelu multiplikatywnym**

gdzie:

N – liczba cykli,

m – liczba faz w cyklu (dla kwartałów m = 4).

W przypadku modelu multiplikatywnego suma wyliczonych wskaźników **powinna się sumować do wartości m, a więc liczby okresów, faz w cyklu**. W takim przypadku nie ma potrzeby korygowania wskaźników i przyjmuje się, że:

Jeżeli jednak wynik jest inny, wówczas należy dokonać korekty wg wzoru i wyliczyć czyste wskaźniki:

gdzie

**Wyznaczanie prognozy (metoda wskaźników) w wersji multiplikatywnej**

gdzie:

 - wartość funkcji trendu w okresie, momencie prognozowanym = m(l-1)+j, a więc w l-tym cyklu j-tej fazy,

 - wartość wskaźnika sezonowości w j-tej fazie cyklu.

**Wyznaczanie surowych wahań sezonowych w modelu addytywnym**

gdzie:

N – liczba cykli,

m – liczba faz w cyklu (dla kwartałów m = 4).

W przypadku **modelu addytywnego suma wyliczonych wskaźników powinna się sumować do 0**. W takim przypadku nie ma potrzeby korygowania wskaźników i przyjmuje się, że:

Jeżeli jednak wynik jest inny, wówczas należy dokonać korekty wg wzoru i wyliczyć **czyste wskaźniki sezonowości:**

**Wyznaczanie prognozy (metoda wskaźników) w wersji addytywnej**

gdzie:

 - wartość funkcji trendu w okresie, momencie prognozowanym = m(l-1)+j, a więc w l-tym cyklu j-tej fazy,

 - bezwzględne odchylenie sezonowe dla j-tej fazy cyklu.

**Pierwsza wartość zmiennej prognozowanej**

**Różnica pomiędzy drugą i pierwszą wartością zmiennej prognozowanej**

**Postać modelu Wintersa w wersji addytywnej**

gdzie:

 - ocena wartości średniej w momencie, okresie t,

 - ocena przyrostu trendu w momencie, okresie t,

 - ocena wskaźnika sezonowości w momencie, okresie t,

r – liczba faz cyklu sezonowego,

α, β, γ – parametry modelu z przedziału [0; 1].

**Postać modelu Wintersa w wersji multiplikatywnej**

gdzie:

 - ocena wartości średniej w momencie, okresie t,

 - ocena przyrostu trendu w momencie, okresie t,

 - ocena wskaźnika sezonowości w momencie, okresie t,

r – liczba faz cyklu sezonowego,

α, β, γ – parametry modelu z przedziału [0; 1].

**Wyznaczanie wartości prognozowanych dla modelu w wersji addytywnej (model Wintersa)**

**Wyznaczanie wartości prognozowanych dla modelu w wersji multiplikatywnej (model Wintersa)**

**Oczekiwane wartości zmiennej**

gdzie:

 - zmienne objaśniające (czynniki mające wpływ na zmienną prognozowaną Y),

 - parametry modelu,

 – składnik losowy,

F – rosnąca funkcja kombinacji liniowej zmiennych i składnika losowego .

**W modelu wartość oczekiwana zmiennej prognozowanej Y jest prawdopodobieństwem wystąpienia danego wariantu, która zależy od wartości zmiennych objaśniających, oszacowanie tego prawdopodobieństwa ma postać:**

gdzie:

 - oszacowania parametrów ,

 - konkretne wartości zmiennych objaśniających.

**Model probitowy** – w modelu tym funkcja F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego N(0; 1), a więc:

Wartości prawdopodobieństwa p są wartościami dystrybuanty w punktach .

**Wartości funkcji odwrotnej** dla dystrybuanty (-1(p)) nazywane probitami wyznacza się według wzoru:

Po przekształceniu probitowym wg powyższego wzoru można przejść do badania **zależności między wartościami probitu (Pr), a zmiennymi** objaśniającymi wyznaczając najczęściej liniowy model ekonometryczny:

**Model logitowy – przyjmuje się, że funkcja F jest dystrybuantą rozkładu logistycznego:**

**W przypadku modelu logitowego, wartości odwrotne do dystrybuanty powyżej są nazywane logitami i wyznaczane według wzoru:**

Po wyznaczeniu logitów można przejść do **badania zależności pomiędzy wartościami L, a zmiennymi objaśniającymi** najczęściej poprzez wyznaczenie modelu ekonometrycznego postaci:

Jeżeli model logitowy oszacujemy uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów, to **wektor b ocen parametrów ma postać**:

gdzie:

**b –** wektor ocen parametrów, tak jak w modelu probitowym,

**X** – macierz obserwacji zmiennych objaśniających, tak jak w modelu probitowym,

**Model Wintersa: Wyznaczanie wartości początkowych rozpoczyna się od pierwszej wartości drugiego cyklu ze względu na ocenę wskaźników sezonowości C, które wyznacza się dla każdej fazy, korzystając z wartości z poprzedniego cyklu**

**Gdy model probitowy oszacujemy uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów, to wektor ocen parametrów wygląda następująco:**

gdzie:

**Wektor zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej (zależnej)**

**Wektor Pr składa się z wartości probitów, które wylicza się wg wzoru:**

gdzie:

 - częstość względna i-tej grupy (i = 1, 2, …, r), czyli = / ( - liczba obserwacji w i-tej grupie, - liczba obserwacji w i-tej grupie, dla których Y = 1, a więc takich, dla których dane zjawisko wystąpiło,

 - funkcja odwrotna do dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego.

**Macierz diagonalna, w której na głównej przekątnej znajdują się oszacowane wartości** **wariancji składników losowych równe:**

gdzie:

 – funkcja gęstości standaryzowanego rozkładu normalnego

**Wektor zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej (zależnej), a więc logitów wyznaczane są wg wzoru: )**

**Macierz diagonalna w której na głównej przekątnej znajdują się oszacowane wartości wariancji składników losowych, w tym przypadku równe:**

**Macierz odwrotna do V jest postaci:**

**Modele przyczynowo- opisowe (jednorównaniowy model ekonometryczny)**

gdzie:

 - zmienna objaśniana (prognozowana, zależna),

 - zmienne objaśniające (niezależne),

 - składnik losowy.

**Estymację modelu będziemy przeprowadzać przy pomocy klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Postać modelu jest następująca:**

gdzie:

 - parametry modelu,

 - zmienne objaśniające (niezależne),

m – liczba zmiennych w modelu

**W przypadku regresji prostej, a więc w momencie kiedy budujemy model, w którym mamy jedną zmienną objaśnianą (zależną) i jedną zmienną objaśniającą (niezależną):**

gdzie:

 - wartości zmiennej objaśnianej (zależnej),

 - wartości zmiennej objaśniającej (niezależnej),

, - parametry modelu.

**Parametry modelu ekonometrycznego można oszacować przy pomocy wzorow:**

**W przypadku kiedy model jest bardziej rozbudowany i posiada więcej niż jedną zmienną objaśniającą (zależną), wówczas wartości ocen parametrów należy wyznaczyć w oparciu o wzór:**

gdzie:

 – wektor ocen parametrów

**Macierz obserwacji zmiennych objaśniających (zależnych) modelu**

**Wektor obserwacji zmiennej objaśnianej (zależnej) i tym samym prognozowanej**

**Wariancję odchyleń losowych w modelu ekonometrycznym można wyliczyć z wzoru**:

gdzie:

n – liczba obserwacji,

m – liczba zmiennych objaśniających,

 - rzeczywiste wartości zmiennej prognozowanej, (i = 1, 2, …, n),

 - prognozowane wartości analizowanej zmiennej, (i = 1, 2, …, n).

**Odchylenie standardowe składnika resztowego modelu**, który jest jednym z mierników tego jak dobrze oszacowany model wyjaśnia kształtowanie się wartości zmiennej prognozowanej można wyliczyć z wzoru:

gdzie:

n – liczba obserwacji,

m – liczba zmiennych objaśniających,

 - rzeczywiste wartości zmiennej prognozowanej, (i = 1, 2, …, n),

 - prognozowane wartości analizowanej zmiennej, (i = 1, 2, …, n).

**Standardowe błędy ocen parametrów strukturalnych modelu oznaczane można uzyskać wyliczając macierz wariancji i kowariancji:**

**Współczynnik zmienności losowej**

gdzie:

s – odchylenie standardowe składnika resztowego,

 - średnia arytmetyczna z wartości zmiennej prognozowanej.

**Skorygowany współczynnik determinacji**

**Statystyka testowa**

gdzie:

 - wartość oceny parametru modelu,

 – standardowy błąd oceny parametru .

**Jeżeli badaniu istotności poddajemy cały wektor parametrów, wówczas weryfikowane hipotezy mają postać:**

: – wszystkie parametry są równe zero (nieistotne statystycznie) lub R2 = 0.

: – przynajmniej jeden parametr jest różny od zera (istotny statystycznie) lub R2 > 0.

Statystykę testową należy wyliczyć wg wzoru:

**W celu oceny symetrii odchyleń losowych (reszt) należy poddać weryfikacji następujące hipotezy**:

: – częstość odchyleń dodatnich () w populacji jest równa 0,5.

: - częstość odchyleń dodatnich () w populacji jest różna od 0,5.

Statystykę testową wyznaczyć należy z wzoru:

gdzie:

m – liczba odchyleń dodatnich w próbie,

n – liczba wszystkich odchyleń w próbie.

**Statystyka testowa dla τ = 1 w przypadku testu Durbina-Watsona**

gdzie:

 - reszta modelu dla okresu, momentu t,

t – numer obserwacji,

n – liczba obserwacji.

**Nieobciążoność składnika losowego** (reszt) jest kolejną własnością wymagającą sprawdzenia. Konieczne jest sprawdzenie tej własności w przypadku modeli nieliniowych, gdyż w przypadku modeli liniowych, których szacowanie parametrów odbywało się przy pomocy klasycznej metody najmniejszych kwadratów, takiej konieczności nie ma, wartość oczekiwana odchyleń losowych z założenia metody KMNK powinna wynosić 0.

Hipotezy mają postać:

: – wartość oczekiwana odchyleń losowych składnika losowego nieistotnie różni się od zera.

: - wartość oczekiwana odchyleń losowych istotnie różni się od zera.

**Wartość statystyki testowej wyliczyć należy wg wzoru:**

gdzie:

 - i-ta reszta modelu,

 - średnia reszt modelu,

n – liczba obserwacji.

**Standaryzacja wartości reszty modelu**

gdzie:

 - i-ta zestandaryzowana wartość reszty modelu,

 - i-ta reszta modelu,

s – odchylenie standardowe reszt

**Badanie koincydencji parametrów strukturalnych modelu**

Jeżeli powyższa równość jest spełniona wówczas ocena parametru jest sensowna ze względu na znak. W ten sposób należy sprawdzić wszystkie parametry modelu, jeżeli każdy z nich będzie spełniał równanie, wówczas możemy powiedzieć, że model posiada własność koincydencji

**Wartości błędów standardowych**

**Ocena wariancji składnika losowego**

gdzie:

e – wektor reszt modelu,

n – liczba obserwacji,

k – liczba zmiennych objaśniających.

**Wartość prawdopodobieństwa (w modelu logitowym)**

**Metoda Największej Wiarygodności**

**Metoda Największej Wiarygodności (w wersji logarytmicznej)**